Тема "Базис, размерност и координати" по Алгебра 1.

Камен Димитров Младенов, Група 6

05 Февруари 2022

По определение, базис е всяка линейно независима система вектори от ненулево линейно пространство, чиято линейна обвивка съвпада със самото пространство.

Също по определение, линейно пространство е крайно, когато е нулевото пространство или когато има краен базис.

Твърдим, че линейно пространство е крайномерно, тогава и само тогава когато е линейна обвивка на краен брой вектори. А ако пространството е и ненулево, то подмножество на образуващите линейната обвивка вектори може да бъде избрано за базис.

Доказателство: Разглеждаме произволно линейно пространство V над поле F. Ако $V = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$, то V е линейна обвивка на един вектор. Ако V има краен базис, то V е линейна обвивка на краен брой вектори. Нека $V = l(a_1, ..., a_n)$. Ако $a_i = \overrightarrow{\mathcal{O}}\ \forall i \in \{1, ..., n\}$, то $V = \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$.

Ако съществува $a_i \neq \overrightarrow{\mathcal{O}}$, нека след преномерация $a_1 \neq \overrightarrow{\mathcal{O}}$. Тогава a_1 е линейно независим и $l(a_1) \subseteq V$. Ако $l(a_1) = V$, то V е крайномерно, иначе $l(a_1) \subset V = l(a_1, a_2, ..., a_n)$ и съществува вектор (след преномерация) $a_2 \notin l(a_1)$. От лемата за линейна независимост, a_1, a_2 са линейно независими.

Аналогично, $l(a_1, a_2) \subseteq l(a_1, ..., a_n)$, ако $l(a_1, a_2) = l(a_1, ..., a_n)$, то V е крайно, иначе след преномерация намираме вектор $a_3 \notin l(a_1, a_2)$ и пак от лемата за линейна независимост, a_1, a_2, a_3 са линейно независими.

$a_1, ..., a_n$ са краен брой вектори, така че след като направим аналогични разсъждения краен брой пъти, ще намерим линейно независими вектори $a_1, ..., a_k, k \leq n$, за които $l(a_1, ..., a_k) = V$ и са базис на V. □

Твърдим, че всеки два базиса на ненулево крайномерно пространство имат един и същ брой вектори.

Доказателство: Нека $a_1, ..., a_n$ и $b_1, ..., b_m$ са базиси на линейно пространство V над поле F. Съгласно основната лема на линейната алгебра върху $b_1, ..., b_m \in V = l(a_1, ..., a_n)$, следва че $m \leq n$. Аналогично от $a_1, ..., a_n \in V = l(b_1, ..., b_m)$ намираме, че $n \leq m$. Следователно, $m = n$. □

По определение, броят на векторите във всеки един базис на ненулево крайномерно пространство V се нарича размерност на V и се бележи с $\dim V$. Ако пространството е нулевото пространство, то размерността е нула. Ако пространството не е крайномерно, размерността е безкрайност.

Твърдим, че за вектори $e_1, ..., e_n$ от линейно пространство V над поле F, свойства 1) и 2) са еквивалентни:

1) $e_1, ..., e_n$ е базис на V

2) всеки вектор $v \in V$ има единствено представяне като линейна комбинация на векторите $e_1, ..., e_n$ с коефициенти $x_1, ..., x_n \in F$: $v = x_1e_1 + ... + x_ne_n$

Доказателство: 1) ⇒ 2) По предположение, $V = l(e_1, ..., e_n)$. Допускаме противното, тоест че съществуват поне две различни представяния за произволен вектор $v \in V$: $x_1e_1 + ... + x_ne_n = v = y_1e_1 + ... + y_ne_n,\ \ x_i, y_i \in F, x_i \neq y_i\ \forall i \in \{1, ..., n\}$. То тогава $(x_1 - y_1)e_1 + ... + (x_n - y_n)e_n = \overrightarrow{\mathcal{O}}$. $e_1, ..., e_n$ са линейно независими, следователно $x_i - y_i = 0 \quad x_i = y_i \quad \forall i \in \{1, ..., n\}$, противоречие!

2) ⇒ 1) От предположение, следва че $x_1e_1 + ... + x_ne_n = \overrightarrow{\mathcal{O}} = 0e_1 + ... + 0e_n \Rightarrow x_1 = ... = x_n = 0$. Тоест $\overrightarrow{\mathcal{O}}$ има единствено представяне с нулеви коефициенти и следователно $e_1, ..., e_n$ са линейно независими и базис. □

Твърдим, че за ненулево линейно пространство V над поле F, $\dim V = n$ тогава и само тогава,

когато съществуват n линейно независими вектора във V и произволни $n+1$ вектора са линейно зависими.

Доказателство: ($\Rightarrow$) Нека $\dim V = n$ и $e_1, ..., e_n \in V$ са базис на V. То тогава, от лемата за линейната независимост, произволни $n+1$ вектора $a_1, ..., a_{n+1} \in V = l(e_1, ..., e_n)$ са линейно зависими.

($\Leftarrow$) Нека $a_1, ..., a_n \in V$ са линейно независими вектори и всички произволни $n+1$ на брой вектора са линейно зависими. Ще докажем, че $a_1, ..., a_n$ са базис на V и $\dim V = n$. Допускаме противното, тоест че $l(a_1, ..., a_n) \subset V$. Тогава от лемата за линейна независимост, съществува $a_{n+1} \in V \setminus l(a_1, ..., a_n)$, такъв че $a_1, ..., a_{n+1}$ са линейно независими. Обаче, всеки $n+1$ на брой вектора са линейно зависими, противоречие! $\square$

Твърдим, че за ненулево линейно пространство V над поле F, $\dim V = \infty$ тогава и само тогава, когато съществуват n на брой линейно независими вектора от V за всяко естествено n.

Доказателство: ($\Rightarrow$) Допускаме противното, тоест $\dim V = \infty$ и за произволно n съществуват произволни линейно зависими вектори $b_1, .., b_n \in V$. Понеже V е ненулево, то със сигурност има поне един линейно независим вектор и $n \geq 2$. Ако n е минималното естествено число с това свойство, то съществуват $n-1$ линейно независими вектори. Съгласно миналото твърдение, следва че $\dim V = n-1$, противоречие!

($\Leftarrow$) Допускаме противното, тоест за всяко естествено число n съществуват n на брой линейно независими вектора от V и $\dim V \neq \infty$. Понеже V е ненулево, то $\dim V = m$ за някое естествено m, тогава от миналото твърдение, произволни $m+1$ вектора са линейно зависими, противоречие! $\square$

Твърдим, че за вектори $a_1, ..., a_n$ от n-мерно линейно независимо пространство V над поле F, условия 1), 2) и 3) са еквивалентни:

1) $a_1, ..., a_n$ са линейно независими 2) $l(a_1, ..., a_n) = V$ 3) $a_1, ..., a_n$ е базис на V

Доказателство: 3) $\Rightarrow$ 1) и 2) Изпълнено по определение за базис

1) $\Rightarrow$ 2) и 3) Допускаме противното, тоест $l(a_1, ..., a_n) \subset V$. Тогава по теоремата за линейна независимост, съществува вектор $a_{n+1} \in V \setminus l(a_1, ..., a_n)$ така че $a_1, ..., a_{n+1}$ са линейно независими. Обаче, от предишно твъдение знаем, че произволни $n+1$ вектора от n-мерно пространство са линейно зависими, противоречие!

2) $\Rightarrow$ 1) и 3) Допускаме противното, тоест съществува $a_i \in l(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n)$. Тогава $l(a_1, ..., a_i, ..., a_n) \subseteq l(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n)$, но също $l(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n) \subseteq l(a_1, ..., a_i, ..., a_n)$. Следователно, $V = l(a_1, ..., a_n) = l(a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1}, ..., a_n)$, тоест базисът на V може да бъде съставен от най-много $n-1$ вектора, противоречие с n-размерността на V! $\square$

Твърдим, че в n-мерно линейно пространство V над поле F, линейно независимите вектори $a_1, ..., a_k$, $k \leq n$ могат да се допълнят до базис $a_1, ..., a_k, a_{k+1}, ..., a_n$ на V.

Доказателство: Ако $k = n$, то $a_1, ..., a_k$ са базис на V (от предишно твърдение, "$a_1, ..., a_n$ са линейно независими" е еквивалентно на "$a_1, ..., a_n$ е базис на V").

Ако $k < n$, то избираме вектор $b_{k+1} \in V \setminus l(a_1, ..., a_k)$. От основната лема на линейната алгебра, $a_1, ..., a_{k+1}$ са линейно независими вектори. Ако $k+1 = n$, то те са базис на V, иначе правим ананлогични разсъждения за a_{k+2} и $a_1, ..., a_{k+2}$. След краен брой аналогични стъпки, получаваме n на брой линейно независими вектора $a_1, ..., a_n$, които са базис на V (съгласно случая $k = n$). $\square$